Intégration par parties

Justification de la méthode

Rappel : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- La dérivée du produit uv est $(uv)' = u'v + uv'$.
- La fonction uv est une primitive de $(uv)'$.

D'où les calculs suivants :

Si a et b sont deux éléments de I, on a alors $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b$.

Mais $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$

Nous pouvons donc écrire : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b.$

D'où la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Méthode 1
Lorsque que l'une des deux fonctions est une exponentielle et que la seconde fonction est un polynôme,
il faut choisir $u'(x)$ pour l'exponentielle et $v(x)$ pour le polynôme.

Exemple : Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{0,5} (3x-2)\mathrm{e}^{2x}.dx$, posons $u = 3x-2$ $\quad u' = 3$

$v = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ $\quad v' = e^{2x}$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5} (3x-2)e^{x}.dx &= [\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(3x-2)]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}.dx \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(3x-2)\right]_0^{0,5} - \left[\frac{3}{2}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^{0,5} = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(3x-2) - \frac{3\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^{0,5} \\
&= \left[\frac{\mathrm{e}^{2\times 0,5}}{2}(3\times 0,5-2) - \frac{3\mathrm{e}^{2\times 0,5}}{4}\right] - \left[\frac{\mathrm{e}^{0}}{2}(0-2) - \frac{3\mathrm{e}^{0}}{4}\right] = \left(-0,5\frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{3\mathrm{e}}{4}\right) - \left(-1 - \frac{3}{4}\right) = -\mathrm{e} + \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Méthode 2
Lorsque que l'une des deux fonctions est une fonction logarithme et que la seconde fonction est un polynôme,
il faut choisir $u'(x)$ pour le polynôme et $v(x)$ pour la fonction logarithme.

Exemple :

Pour calculer l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^2 (3x-2)\ln x.dx$, posons $u = \ln x$ $\quad u' = \dfrac{1}{x}$

$v = \dfrac{3x^2}{2} - 2x$ $\quad v' = 3x-2$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (3x-2)\ln x.dx &= \left[\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right).dx = \left[\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - 2\right).dx \\
&= \left[\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln x - \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \left(\left(\frac{3\times 4}{2} - 4\right)\ln 2 - \frac{3}{2}\frac{4}{2} + 4\right) - 0 = 2\ln 2 + 1
\end{aligned}$$