**Exercice 1 :** [Résolution d'une équation différentielle ] **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -1 - 2x$
où $y$ désigne une fonction de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

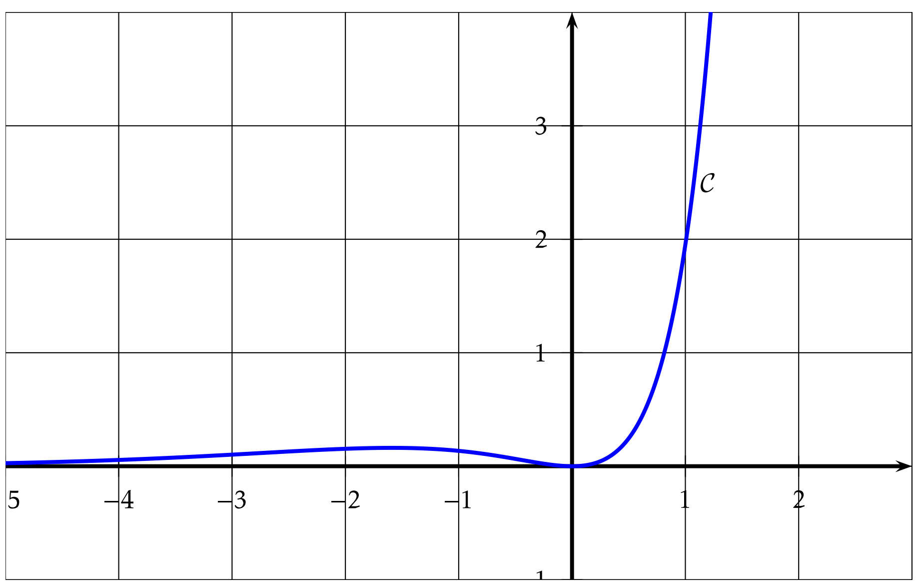
1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_1)$ : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Démontrer que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x - 2$ estune solution particulière de l'équation (E).
3. Déduire du 1. et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

**Exercice 2 :** **8 points**

*A. Résolution d'une équation différentielle*
On considère l'équation différentielle $(E)$ : $y' - 2y = xe^x$ où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y'$ la fonction dérivée de $y$.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)$ : $y' - 2y = 0$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x - 1)e^x$. Démontrer que la fonction $g$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

*B. Étude locale d'une fonction*
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



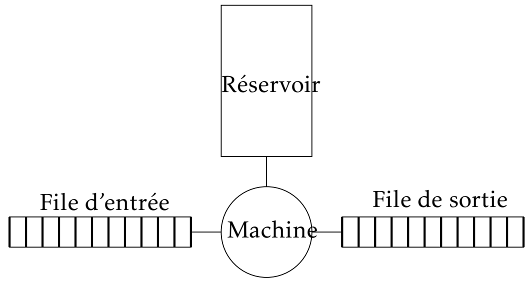

1. a. Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x)$.
   b. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abcisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

*C. Calcul intégral*

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}dx$. Démontrer que $I = 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right)$.
2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^x dx$. Démontrer que la fonction $G$, définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x.e^x$ est une primitive de la fonction $g$, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1).e^x$. En déduire que $J = 0,3\left(e^{0,3} + e^{-0,3}\right)$.
3. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)dx$.
   a. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $L$.
   b. Donner la valeur approchée de $L$ arrondie à $10^{-5}$.

**Exercice 3 :** **8 points**

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'approvisionnement en bouteilles vides, selon le schéma ci-contre.
L'exercice consiste en une étude statistique du bon fonctionnement de ce système.




1. *Défaut d'approvisionnement*
   On considère qu'il y a un défaut d'approvisionnement :
   – soit lorsque la file d'entrée des bouteilles est vide,
   – soit lorsque le réservoir est vide.
   On tire un jour ouvrable au hasard dans une année. On note $A$ l'événement : « la file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée » et $B$ l'évènement : « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée ».
   On suppose que les évènements $A$ et $B$ sont indépendants et une étude statistique a montré que $P(A) = 0,04$ et $P(B) = 0,02$.
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   **a.** $E_1$ : « la machine a connu les deux défauts d'approvisionnement dans la journée ».
   **b.** $E_2$ : « la machine a connu au moins un défaut d'approvisionnement dans la journée ».
2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*
   On note $X$ la variable aléatoire qui à toute période de 100 jours consécutifs, tirée au hasard dans les jours ouvrables d'une année, associe le nombre de pannes de la machine. Une étude, menée par le constructeur sur un grand nombre de machines de ce type, permet d'admettre que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre 0,5.
   Déterminer :
   **a.** $P(X \leqslant 2)$ ;
   **b.** la probabilité de l'évènement : « la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs ».
   **c.** le plus petit entier $n$ tel que $P(X \leqslant n) = 0,99$.

**Dans ce qui suit les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-3}$.**

3. *Qualité de l'embouteillage à la sortie*
   On désigne par $Y$ la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production d'une heure, associe le volume d'eau qu'elle contient.
   **a.** On admet que, lorsque la machine est bien réglée, $Y$ suit la loi normale de moyenne 1,5 et d'écart type 0,015.
   Une bouteille est conforme aux normes de l'entreprise lorsqu'elle contient entre 1,47 et 1,53 litre d'eau.
   Calculer la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.
   **b.** L'entreprise désire améliorer la qualité de remplissage : Il est envisagé de modifier le réglage de la machine à embouteiller.
   On note $Z$ la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée dans la production future, associera le volume d'eau qu'elle contient.
   On suppose que la variable aléatoire $D$ suit une loi normale de moyenne $1,5$ et d'écart-type $\sigma$.
   Déterminer $\sigma$ pour que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production future satisfasse à la norme soit égale à 0,98.

**Exercice 1 :** **4 points**

1. L'équation caractéristique associée à $(E_1)$ : $y''-3y'+2y=0$. est l'équation $r^2-3r+2=0$ qui admet deux racines réelles $r=1$ et $r=2$.
   La solution générale de $(E_1)$ est alors $y(x)=\lambda e^x+\mu e^{2x}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$
2. Si on pose $y=h(x)=-x-2$ alors $y'=h'(x)=-1$ et $y''=h''(x)=0$
   donc $y''-3y'+2y=0-3\times(-1)+2(-x-2)=3-2x-4=-1-2x$.
   Nous retrouvons le second membre de l'équation (E) donc $h$ est une solution particulière de l'équation (E).
3. La solution générale de l'équation $(E)$ s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée $(E_0)$ et une solution particulière de $(E)$ : $y(x)=\lambda e^x+\mu e^{2x}-x-2$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
4. $f(0)=0\Leftrightarrow\lambda e^0+\mu e^0-0-2=0\Leftrightarrow\lambda=-\mu+2$.
   $f'(x)=\lambda e^x+2\mu e^{2x}-1$ donc $f'(0)=2\Leftrightarrow\lambda e^0+2\mu e^0-1=2\Leftrightarrow\lambda+2\mu=3$.
   Nous avons alors $-\mu+2+2\mu=3\Leftrightarrow\mu=1$ d'où $\lambda=-1+2=1$
   La solution $f$ de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0)=0$ et $f'(0)=2$ est la fonction
   $f(x)=e^x+e^{2x}-x-2$

**Exercice 2 :** **8 points**

*A. Résolution d'une équation différentielle*

1. Solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)$ : $y'-2y=0$ : Ici $a=1$ et $b=-2$.
   $g(x)=-2$ admet pour primitive $G(x)=-2x$ donc les solutions sont les fonctions $f(x)=k.e^{2x}$.
2. Si $y=g(x)=(-x-1)e^x$ alors $y'=g'(x)=-e^x+(-x-1)e^x$.
   On en déduit $y'-2y=-e^x+(-x-1)e^x-2(-x-1)e^x=-e^x-(-x-1)e^x=-e^x+x.e^x+e^x=x.e^x$.
   La fonction $g$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.
3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$ est donc formé des fonctions $f(x)=k.e^{2x}+(-x-1)e^x$.
4. $f(0)=0\Leftrightarrow k.e^0+(-0-1)e^0=0\Leftrightarrow k-1=0\Leftrightarrow k=1$. On en déduit $f(x)=e^{2x}+(-x-1)e^x$.

*B. Étude locale d'une fonction*

1. **a.** $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ donc $f'(x)=2.e^{2x}-e^x-(x+1)e^x=2.e^x.e^x-e^x-x.e^x-e^x=2.e^x.e^x-x.e^x-2e^x=e^x(2e^x-2-x)$
   **b.** $f'(0)=e^0(2e^0-2-0)=1(2-2)=0$. On en déduit que la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale.

*C. Calcul intégral*

1. On note $I=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}e^{2x}dx$. $e^{2x}$ admet pour primitive $\dfrac{e^{2x}}{2}$ donc $I=\left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_{-0,3}^{0,3}=\dfrac{e^{0,6}}{2}-\dfrac{e^{-0,6}}{2}=0,5\left(e^{0,6}-e^{-0,6}\right)$.
2. $G(x)=x.e^x$ donc $G'(x)=e^x+x.e^x=x+1).e^x$. G est bien une primitive de la fonction $g(x)=(x+1).e^x$.
   On en déduit $J=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}(x+1)e^xdx=[x.e^x]_{-0,3}^{0,3}=0,3.e^{0,3}-(-0,3).e^{-0,3}=0,3(e^{0,3}+e^{-0,3})$.
3. On note $L=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}f(x)dx$.
   **a.** $L=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}e^{2x}-(x+1)e^xdx=\int_{-0,3}^{0,3}e^{2x}dx-\int_{-0,3}^{0,3}(x+1)e^xdx=I-J=0,5\left(e^{0,6}-e^{-0,6}\right)-0,3(e^{0,3}+e^{-0,3})$.
   **b.** $L=0,00945$ à $10^{-5}$ près.

**Exercice 3** **8 points**

1. **a.** $A$ et $B$ sont indépendants donc $P(E_1) = P(A) \times P(B) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008$
   **b.** $E_2 = A \cup B$ donc $P(E_2) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 = 0,0592$
2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours*
   **a.** $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6065 + 0.3032 + 0,0758 = 0,9855$ ;
   **b.** La probabilité de l'évènement : « la machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs »est $P(X \leqslant 4) = P(X \leqslant 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,9855 + 0.0126 + 0.0015 = 0.9996$
   **c.** Recherche du plus petit entier $n$ tel que $P(X \leqslant n) = 0,99$ :
   $P(X \leqslant 2) = 0,9855$ et $P(X \leqslant 3) = 0,9855 + 0.0126 = 0,9981$ donc $n = 3$.

**Dans ce qui suit les volumes sont exprimés en litres et tous les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-3}$.**

3. Q*ualité de l'embouteillage à la sortie*
   **a.** La variable aléatoire $Y$ suit la loi normale de moyenne 1.5 et d'écart type 0.015.
   La probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme est $P(1,47 < Y < 1,53) = 0,954$ à $10^{-3}$ près.
   **b.** La variable aléatoire $D$ suit une loi normale de moyenne 1,5 et d'écart-type $\sigma$.
   La probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production future satisfasse à la norme soit égale à 0,98 permet de dire $P(1,47 < D < 1,53) = 0,98$
   $P(1,47 < D < 1,53) = 0,98 \Leftrightarrow P(\dfrac{1,47 - 1,5}{\sigma} < \dfrac{D - 1,5}{\sigma} < \dfrac{153 - 1,5}{\sigma}) = 0,98 \Leftrightarrow P(\dfrac{-0,3}{\sigma} < \dfrac{D - 1,5}{\sigma} < \dfrac{0,3}{\sigma}) = 0,98$
   or nous savons que $P(-2,33 < Z < 2,33) = 0,98$ donc $\dfrac{0,3}{\sigma} = 2,33 \Leftrightarrow \sigma = \dfrac{0,03}{2,33} = 0,013$