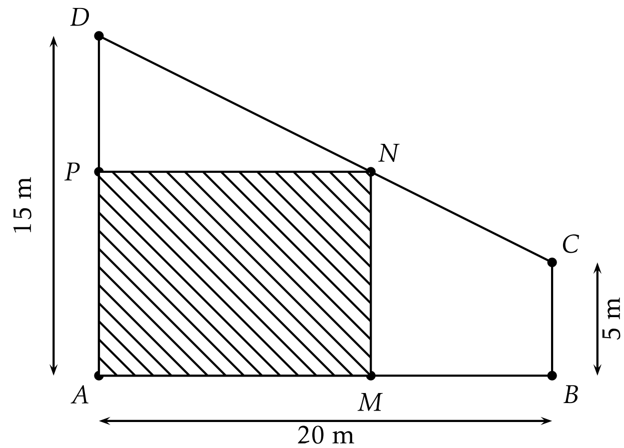
Exercice 1 :

Un particulier désire construire sa maison sur un terrain qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-contre par le quadrilatère ABCD tel que AB = 20 m, AD = 15 m et BC = 5 m.
La base de la maison occupe le rectangle AMNP.
On note x la longueur AM en mètres et $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle AMNP en m^2.



1. Démontrer que $\text{AP} = 15 - \frac{1}{2}x$.
2. a. exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle AMNP en fonction de x.
   b. Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?
3. a. Déterminer la forme canonique de $\mathscr{A}(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
   b. En déduire l'aire maximale de la surface au sol de cette maison et quelles seraient alors ses dimensions.
4. Déterminer par le calcul les valeurs pour lesquelles l'aire au sol de cette maison serait :
   a. Égale à $100\ \text{m}^2$.
   b. Supérieure ou égale à $110\ \text{m}^2$. (on donnera les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième)

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\text{i}}\,; \vec{\text{j}}\right)$, on considère les points :
A(−3 ; −2), B(−1.5 ; −1), C (2 ; −3), D(−5 ; 1), E(4.5 ; 3), F(7 ; 4.5), G (−8 ; −3), H(8 ; 7.5).
Placer les points sur une feuille séparée dans le sens paysage avec le repère au centre de la feuille. La figure sera complétée au cours de l'exercice.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AE}}$, $\overrightarrow{\text{AF}}$, $\overrightarrow{\text{GH}}$.
2. En utilisant la colinéarité des vecteurs, donner des réponses justifiées aux questions suivantes :
   a. E est-il situé sur la droite (AB) ?
   b. F est-il situé sur la droite (AB) ? Les droites (AB) et (GH) sont-elles parallèles ?
3. Démontrer que B est le milieu de [DC].
4. Démontrer que CADO est un parallélogramme.
5. Déterminer les coordonnées du point M tel que DAME soit un parallélogramme.
6. Démontrer que le triangle ADO est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 3 :

ABCD est un carré de côté 6 cm. I est le milieu du segment [CD].
Les points J et K sont définis par les relations vectorielles :
$\overrightarrow{\text{AJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Faire une figure.
2. En choisissant judicieusement un repère, démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 1 :

1. Si l'on construit le point E du segment [AD] tel que (EC) soit parallèle à (AB) alors nous avons AE = 5 donc DE = 10 et EC = 20.
   En appliquant la propriété de Thalès dans le triangle DEC avec (EC) parallèle à (PN) nous obtenons : $\dfrac{PN}{EC} = \dfrac{DP}{DE}$ d'où $\dfrac{x}{20} = \dfrac{DP}{10}$. Nous en déduisons que $DP = \dfrac{10}{20}x = \dfrac{1}{2}x$.
   Alors AP = AD - DP $= 15 - \dfrac{1}{2}x$.

2. **a.** L'aire du rectangle AMNP est $\mathscr{A}(x) = AM \times AP = x\left(15 - \dfrac{1}{2}x\right)$

   b. Cette fonction est définie pour $x \in [0;20]$ car x est une longueur donc positif et x est inférieur à la longueur AB.

3. **a.** Forme canonique : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{15}{2\times\dfrac{1}{2}} = 15$ et $\beta = \mathscr{A}(15) = 112,5$ d'où $\mathscr{A}(x) = -\dfrac{1}{2}(x-15)^2 + 112,5$

   b. L'aire maximale de la maison est donc égale à 112,5 m^2, elle est obtenue pour $x = 15$.
   Dans ce cas la longueur est 15 m et la largeur est $15 - \dfrac{1}{2}\times 15 = 7,5$ m.

4. **a.** L'aire sera égale à 100 m^2 lorsque $-\dfrac{1}{2}x^2 + 15x = 100 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + 15x - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 200 = 0$.
   $\Delta = 30^2 - 4\times 200 = 100$ donc $x_1 = 10$ et $x_2 = 20$.
   L'aire sera égale à 100 m^2 lorsque $x = 10$ ou $x = 20$.

   b. L'aire sera supérieure ou égale à 110 m^2 lorsque $-\dfrac{1}{2}(x-15)^2 + 112,5 \geq 110$:
   $-\dfrac{1}{2}x^2 + 15x \geq 100 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + 15x - 110 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 220 \geq 0$.
   $\Delta = 30^2 - 4\times 220 = 20$ donc $x_1 = \dfrac{30 - sqrt20}{2} = \dfrac{30 - 2sqrt5}{2} = 15 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 15 + \sqrt{5}$.
   $a > 0$ donc l'expression est positive à l'extérieur de l'intervalle des racines.
   L'aire de la maison sera supérieure ou égale à 110 m^2 pour $x \in [15 - \sqrt{5}; 15 + \sqrt{5}]$
   c'est à dire $x \in [12,8; 17,2]$

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$, on considère les points :
A(−3 ; −2), B(−1.5 ; −1), C (2 ; −3), D(−5 ; 1), E(4.5 ; 3), F(7 ; 4.5), G (−8 ; −3), H(8 ; 7.5).
Placer les points sur une feuille séparée dans le sens paysage avec le repère au centre de la feuille. La figure sera complétée au cours de l'exercice.

1. Coordonnées de vecteurs :
   $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{rcl} -1.5-(-3) & = & 1.5 \\ -1-(-2) & = & 1 \end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{AE}\left|\begin{array}{rcl} 4.5-(-3) & = & 7.5 \\ 3-(-2) & = & 5 \end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{AF}\left|\begin{array}{rcl} 7-(-3) & = & 10 \\ 4.5-(-2) & = & 6.5 \end{array}\right.$ $\quad\overrightarrow{GH}\left|\begin{array}{rcl} 8-(-8) & = & 16 \\ 7.5-(-3) & = & 10.5 \end{array}\right.$

2. En utilisant la colinéarité des vecteurs, donner des réponses justifiées aux questions suivantes :

   a. E est-il situé sur la droite (AB) ?
   $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 1.5 \\ 1 \end{array}\right.$ $\overrightarrow{AE}\left|\begin{array}{l} 7.5 \\ 5 \end{array}\right.$ $\quad 1.5\times 5 - 1\times 7.5 = 0 \quad$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
   E est situé sur (AB).

   b. F est-il situé sur la droite (AB) ?
   $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 1.5 \\ 1 \end{array}\right.$ $\overrightarrow{AF}\left|\begin{array}{l} 10 \\ 6.5 \end{array}\right.$ $\quad 1.5\times 6.5 - 1\times 10 = -0.25 \quad$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas colinéaires.
   F n'est pas situé sur (AB).

   Les droites (AB) et (GH) sont-elles parallèles ?
   $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 1.5 \\ 1 \end{array}\right.$ $\overrightarrow{GH}\left|\begin{array}{l} 16 \\ 10.5 \end{array}\right.$ $\quad 1.5\times 10.5 - 1\times 16 = -0.25 \quad$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas colinéaires.
   (AB) et (GH) ne sont pas parallèles.

3. Démontrer que B est le milieu de [DC].
   Les coordonnées du milieu de [DC] sont : $\dfrac{-5+2}{2} = -1.5$ et $\dfrac{1+(-3)}{2} = -1$.
   Nous retrouvons les coordonnées de B donc B est le milieu de [DC].

4. Démontrer que CADO est un parallélogramme.

Les coordonnées du milieu de [OA] sont : $\dfrac{-3}{2} = -1.5$ et $\dfrac{-2}{2} = -1$.

Nous retrouvons les coordonnées de B donc B est le milieu de [OA].

Les segments [CD] et [OA] ont le même milieu B donc CADO est un parallélogramme.

5. Déterminer les coordonnées du point M tel que DAME soit un parallélogramme.

DAME est un parallélogramme si $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{DE}\left|\begin{array}{l}9.5\\2\end{array}\right.\quad \overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l}x-(-3)\\y-(-2)\end{array}\right.$ donc $\begin{array}{l}x+3=9.5\\y+2=2\end{array}\qquad \begin{array}{l}x=6.5\\y=0\end{array}$

Les coordonnées de M sont (6.5 ; 0).

6. Démontrer que le triangle ADO est un triangle rectangle isocèle.

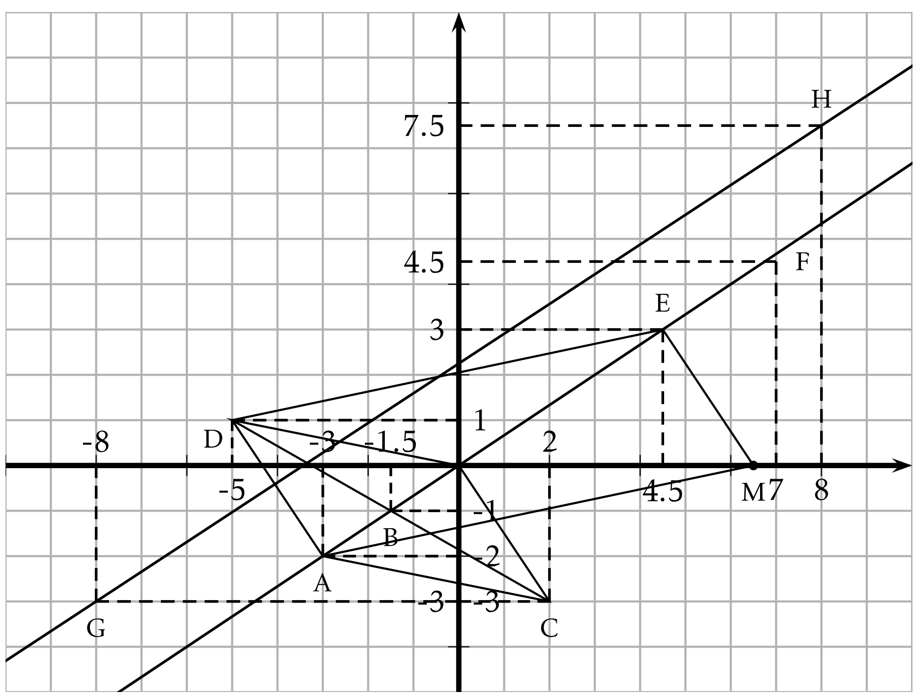
$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l}-3\\-2\end{array}\right.\quad OA^2 = (-3)^2 + (-2)^2 = 13$

$\overrightarrow{AD}\left|\begin{array}{rcl}-5-(-3) & = & -2\\1-(-2) & = & 3\end{array}\right.\quad AD^2 = (-2)^2 + 3^2 = 13$

$\overrightarrow{OD}\left|\begin{array}{l}-5\\1\end{array}\right.\quad OD^2 = (-5)^2 + 1^2 = 26$

Nous constatons que OA = AD et que $OD^2 = OA^2 + AD^2$.

Le triangle ADO est un triangle rectangle isocèle en A.

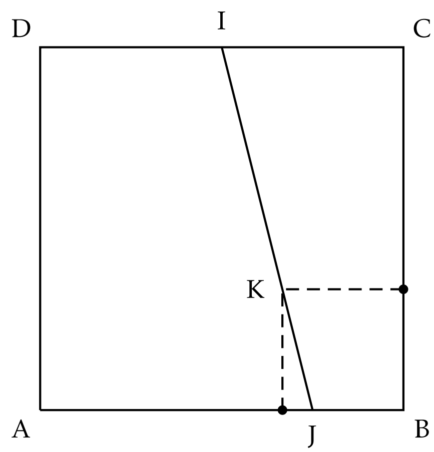


Exercice 3 :

ABCD est un carré de côté 6 cm. I est le milieu du segment [CD].
Les points J et K sont définis par les relations vectorielles :
$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.

2. En choisissant judicieusement un repère, démontrer que les points I, J et K sont alignés.



Choisissons le repère (A, $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$; $\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.
Les coordonnées des points A, B, C et D sont donc : A (0 ; 0) ; B (6 ; 0) ; C (6 ; 6) ; D (0 ; 6).

I est le milieu de [DC] : $x_{\mathrm{I}} = \frac{0+6}{2} = 3$ et $y_{\mathrm{I}} = \frac{6+6}{2} = 6$

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}6\\0\end{array}\right.$ or $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $J\left|\begin{array}{l}x_J = \frac{3}{4}\times 6 = 4.5\\ y_J = 0\end{array}\right.$

$\overrightarrow{BA}\left|\begin{array}{r}-6\\0\end{array}\right.$ $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{rcl}6-6 &=& 0\\ 6-(0) &=& 6\end{array}\right.$ $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BK}\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}\times(-6)+\frac{1}{3}\times 0 = -2\\ \frac{1}{3}\times 6 = 2\end{array}\right.$

Nous avons alors $x_K - x_B = x_K - 6 = -2$ d'où $x_K = -2+6 = 4.$ et $y_K - y_B = y_K = 2$.

Il ne reste plus qu'à étudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$:

$\overrightarrow{JK}\left|\begin{array}{l}-0.5\\2\end{array}\right.$ $\overrightarrow{JI}\left|\begin{array}{l}-1.5\\6\end{array}\right.$ $-0.5\times 6 - 2\times(-1.5) = 0$ $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires.
K est situé sur (JI).